ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ ΒΑΓΙΩΝ

ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ: 2013-2014 1[Ο] ΤΕΤΡΑΜΗΝΟ

ΤΙΤΛΟΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:

«ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΕΣ ΚΑΙ ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ»

Ομάδα Α΄ **Μαίρη Νικολάου, Αντωνία Μερκούρη , Δήμητρα Παντελοπούλου, Σοφία Τζώνη**

Ομαδα Β΄ **Βουδούρη Γεωργία Κατρισιώση Πόπη Τζέλα Αντυ Τσαραμπάρη Ζωή**

Ομαδα Γ΄ **Αντωνίου Αντώνης**
Γεωργαντάς Χαράλαμπος
Τσέλιος Χρήστος Τσώστη Δήμητρα

Ομαδα Δ΄ **Βαλμά Δημητρα Ευθυμιου Κατερίνα**
Παγώνας Κωστας

ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

ΒΑΛΜΑΣ ΣΩΤΗΡΗΣ

ΒΑΓΙΑ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2014

Περίληψη:

Η εργασία μας ξεκινά από την ανάπτυξη της γεωμετρίας από τους αρχαίους χρόνους για πρακτικούς λόγους μέτρησης και κατασκευών και την μετεξέλιξη της σε ένα επιστημονικό δημιούργημα το οποίο ήταν το πρώτο και για πολλούς αιώνες το μοναδικό, αυτό της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Παρουσιάζονται οι αρχές που αποδέχτηκε ο Ευκλείδης και το πέρασμα του από το απλό στο σύνθετο. Γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στο $5^{ο}$ αίτημα το οποίο είναι κομβικής σημασίας για τη φύση της Γεωμετρίας. Η μη αποδοχή του αιτήματος αυτού, που φαινομενικά αντιβαίνει στην ενόραση που έχει ο άνθρωπος για τον φυσικό κόσμο που τον περιβάλει, δημιουργεί συνθήκες για ανάπτυξη άλλων αξιωματικών-επιστημονικών δημιουργημάτων, των Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών. Στην συνέχεια η εργασία αναφέρεται στη μη ευκλείδεια γεωμετρία, όπως την διατύπωσε ο Bernart Rimman, τα πέντε αιτήματα που αυτός διατύπωσε ώστε να προκύψει μια μη ευκλείδια γεωμετρίας που σήμερα είναι γνωστή ως γεωμετρία του Rimman. Επειτα συνεχίζει στον κλάδο των Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών και εκείνης που διατύπωσε ο Nikolay Lobatzeysky και, δίνεται έμφαση στους ορισμούς, στις προτάσεις, αλλά και στα πορίσματα που εκείνος ανέπτυξε.

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο. ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ 4

1. Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΑΝΑ ΤΟΥΣ ΑΙΩΝΕΣ 4
2. Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΠΡΙΝ ΤΟΝ ΕΥΚΛΕΙΔΗ 5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο. : ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 7

1. ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ ΒΙΟΓΡΑΦΙΑ 7
2. ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ 8
3. ΤΑ 5 ΑΙΤΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ 9
4. ΤΟ 5^{ο} ΑΙΤΗΜΑ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ 11

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο} :ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ- RIEMANN 14

1. ΒΙΟΓΡΑΦΙΑ ΤΟΥ RIEMANN 14
2. Η ΑΡΧΗ: 15
3. ΤΑ ΑΙΤΗΜΑΤΑ ΤΟΥ RIEMANN 17
4. ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ: 18

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο. ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ - LOBACHEVSKY 20

1. ΒΙΟΓΡΑΦΙΑ:NIKOLAY IVANOVICH LOBACHEVSKY (1792-1856) 20
2. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΛΟΜΠΑΤΣΕΦΣΚΙ 21
3. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ, ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΟΥ ΛΟΜΠΑΤΣΕΦΣΚΙ 23
4. ΤΡΙΓΩΝΑ ΣΤΗΝ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 24

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΣΤΗΝ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 25

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο. ΠΗΓΕΣ 28

1. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:... 28
2. ΔΙΚΤΥΟΓΡΑΦΙΑ: 28

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο. ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

1. Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΑΝΑ ΤΟΥΣ ΑΙΩΝΕΣ

Η ιστορία της γεωμετρίας έχει ρίζες που εντοπίζονται σε κάποιες αναπτυγμένες κοινωνίες της Ανατολής. Οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι, Αιγύπτιοι , Ινδοί και Κινέζοι είναι από τους πρώτους λαούς που ανέπτυξαν την γεωμετρία . Δεν είναι τυχαίο ότι αυτοί οι λαοί ζούσαν κοντά σε μεγάλα ποτάμια διότι με τις συχνές τους πλημμύρες μετέβαλλαν το γύρο χώρο σ' ένα απέραντο λασπότοπο. Οι κάτοικοι είχαν την ανάγκη να μετρούν την γη να επανακαθορίζουν τα όρια των αγρών και να επινοούν τρόπους κατασκευής αρδευτικών έργων, ώστε να ελέγχονται οι πλημμύρες και έτσι αντί για λασπότοπους να έχουν πλούσιους σιτοβολώνες και ορυζώνες .Αποτέλεσμα αυτών των προσπαθειών ήταν η δημιουργία και η ανάπτυξη της γεωμετρίας. Η γεωμετρία λοιπόν των ανατολικών λαών γεννήθηκε από την ανάγκη επίλυσης πρακτικών προβλημάτων. Δηλαδή ο σκοπός της ήταν να εξυπηρετήσει την γεωμετρία τις τεχνικές κατασκευές, τη μηχανική , την αρχιτεκτονική, τις πρακτικές ανάγκες και όχι να αποκαταστήσει αλήθειες θεωρητικού χαρακτήρα .Εκείνο που σήμερα ονομάζουμε απόδειξη δεν το συντάσσουμε στη γεωμετρία των Βαβυλωνίων ή των Αιγυπτίων .Ο πρώτος λαός που ίδρυσε κι ανέπτυξε την γεωμετρία ως μαθηματική επιστήμη ήταν οι Αρχαίοι Έλληνες. Αυτοί εισήγαγαν και ανέπτυξαν την αποδεικτική διαδικασία ,θεμελίωσαν και δόμησαν την γεωμετρία και δημιούργησαν την Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Ένα από τα έργα των αρχαίων Ελλήνων είναι η αξιωματική θεμελίωση τα οποία τα βρίσκουμε σε πολλά αρχαία ελληνικά κείμενα. Για παράδειγμα οι Πυθαγόρειοι ανέπτυξαν μια μορφή απόδειξης αρκετά πιο βελτιωμένη από του Θαλή. Γνώριζαν ότι η αποδεικτική διαδικασία έπρεπε να είχε κάποιους αρχικούς συλλογισμούς. Καθόρισαν ένα σύνολο αποδεικτικών κανόνων που μπορούσαν και τα χρησιμοποιούσαν και εισήγαγαν ορισμούς για συγκεκριμένα μαθηματικά αντικείμενα. Ακόμη ο Αριστοτέλης αναφέρεται στις αρχικές έννοιες στους ορισμούς στα αξιώματα και στην απόδειξη. Ένα παράδειγμα αξιωματικής θεμελίωσης είναι τα ΄΄Στοιχεία΄΄ του Ευκλείδη. Ο Ευκλείδης έγραψε αρχικούς όρους των γεωμετρικών αντικειμένων όπως είναι το σημείο και η γραμμή, επίσης τις βασικές τους ιδιότητες και καθιέρωσε τους ορισμούς, τα αιτήματα και τις κοινές έννοιες .Με αυτό τον τρόπο δημιούργησε μια μαθηματική θεωρία μέσα στην οποία κάθε πρόβλημα μπορεί να αποδειχθεί με την βοήθεια των ορισμών, των αιτημάτων και των κοινών εννοιών. Αυτές οι αποδεικτικές διαδικασίες είναι ισχυρές και αναλλοίωτες μέχρι σήμερα.

Ακόμη εμφανίζονται οι πρώτες συστηματικές γεωμετρικές πραγματείες , όπως του Ιπποκράτη του Χίου περί το 440π.Χ , και τα <<Στοιχεία >> του Ευκλείδη , που αποτέλεσαν το επιστέγασμα της αρχαίας Ελληνικής μαθηματικής παράδοσης, αλλά και πρότυπο επιστημονικού ιδεώδους για πολλούς αιώνες . Από μελέτη της θέσης του μεγέθους και της μορφής των γεωμετρικών σχημάτων για άμεσες πρακτικές εφαρμογές η Γεωμετρία μεταμορφώνεται σε επιστήμη που μελετά αφηρημένα νοητικά αντικείμενα , οι σχέσεις των οποίων αποδεικνύονται με τη βοήθεια μιας λογικής ακολουθίας προτάσεων .Ακόμη την Ελληνιστική περίοδο αναπτύσσονται θεμελιακά νέες μέθοδοι υπολογισμού επιφανειών και όγκων , που στηρίζονται σε θεωρητικές προσεγγίσεις και μαθηματικές θεωρίες . Επίσης ,η Ευρωπαϊκή Αναγέννηση οδήγησε σε νέα άνθηση της Γεωμετρίας . Πραγματοποιείται με την εισαγωγή της μεθόδου των συντεταγμένων από του Ντεκάρτ το πρώτο μισό του 17^{ου} αιώνα .Επίσης το 18^{ο} αιώνα διαμορφώνεται η Διαφορική Γεωμετρία στα έργα του Euler και του Monz, αντικείμενο της οποίας αρχικά γίνονται οποιεσδήποτε λείες καμπύλες και επιφάνειες και οι μετασχηματισμοί τους . Στα μέσα του 17^{ου} αιώνα αναπτύσσεται και η Προβολή Γεωμετρία στις μελέτες του Ntekart και του Paskal πάνω στην απεικόνιση σωμάτων στο επίπεδο .Το αντικείμενο του νέου κλάδου επικεντρώνεται από τον Poinse στην μελέτη των ιδιοτήτων των επιπέδων σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτες κατά την προβολή τους από ένα επίπεδο σε άλλο , ενώ η καθαυτό θεωρία της γεωμετρικής απεικόνισης οδήγησε στο σύστημα της Παραστατικής Γεωμετρίας του Monz.

2. Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΠΡΙΝ ΤΟΝ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

Τα μαθηματικά της εποχής αυτής αποτελούσαν μέρος της μυστικής γνώσης και συχνά συνδέονταν με τον μυστικισμό. Αργότερα η αρμονία η οποία ενυπάρχει στις γεωμετρικές δομές ,θεωρήθηκε έκφραση ενός: «θεϊκού σχεδίου» που διέπει τον κόσμο. Όμως για να μπορέσει ο άνθρωπος να χειριστεί και να μελετήσει αυτές τις μορφές , είναι απαραίτητη η αναπαράστασή τους. Ακόμη η αφαίρεση της καθημερινής εμπειρίας και η μεταφορά των απλών παρατηρήσεων στο επίπεδο μιας νοητικής διεργασίας αρχικά εξυπηρέτησε πρακτικές και τεχνικές ανάγκες. Αυτό ήταν απαραίτητο μετά τις ετήσιες πλημμύρες του ποταμού Νείλου, προκειμένου να αποδοθούν και πάλι οι ιδιοκτησίες στους κατόχους τους και να επιμετρηθούν οι φορολογικές τους υποχρεώσεις στους Φαραώ. Αργότερα πιο προχωρημένοι υπολογισμοί χρησιμοποιήθηκαν στην οικοδόμηση των πυραμίδων. Ανάλογες πρακτικές ανάγκες κάλυπτε η γεωμετρία και σε άλλους λαούς όπως μαρτυρούν σύγχρονες αρχαιολογικές ανακαλύψεις.

Σε κάθε περίπτωση, η κατασκευή των πυραμίδων και άλλων τεχνικών έργων σηματοδοτεί μια αναμφισβήτητη πρόοδο. Όμως αυτή παραμένει καθαρά εμπειρική. Για παράδειγμα, διάφορα εμβαδά υπολογίζονταν κατά περίπτωση πρακτικά , χωρίς να υπάρχει ένας συγκεκριμένος τύπος ή αλγόριθμος για το κάθε είδος. Ομοίως και διαφορετικοί αριθμητικοί υπολογισμοί και πράξεις πραγματοποιούνταν κατά περίπτωση, χωρίς να ακολουθείται κάποιος κανόνας. Επομένως, οι πολιτισμοί της Αιγύπτου και της Βαβυλώνας δεν έδωσαν στους Έλληνες, με τους οποίους ήρθαν σε επαφή, τίποτα το θεωρητικό, αλλά μια τεράστια συλλογή συγκεκριμένων μαθηματικών δεδομένων, με τη μορφή υπολογιστών ή απλών καταγραφών.

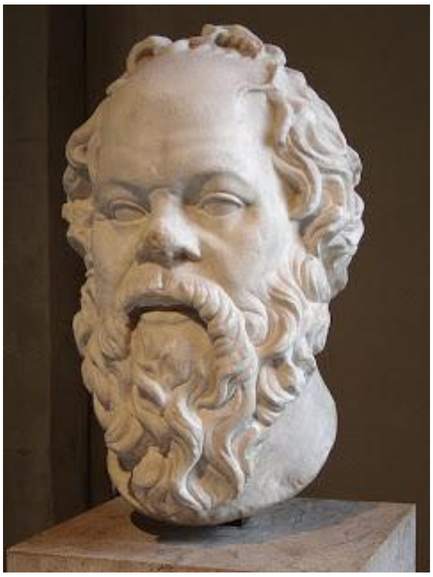
ΕΙΚΟΝΑ 1Η ΠΥΡΑΜΙΔΑ ΤΟΥ ΧΕΟΠΑ

Επίσης η μελέτη της γεωμετρίας, και των μαθηματικών γενικότερα, πέρα από τις πρακτικές ανάγκες, ως πνευματική αναζήτηση, ως θεωρητικό πρόβλημα, είναι κατάκτηση του αρχαίου ελληνικού πνεύματος. Είναι το αποτέλεσμα του ελληνικού ορθολογισμού , που προσπαθεί να βάλει τάξη στον περιβάλλοντα κόσμο και να τον ερμηνεύσει , αναζητώντας το «γιατί» και το «πως» των φαινομένων. Εδώ πρέπει να αναφερθεί πρώτα το όνομα του γεωμέτρη και φιλοσόφου Θαλή. Ο Θαλής, στο πλαίσιο του παραπάνω ορθολογισμού, αναζήτησε τη θεωρητική επεξήγηση των εμπειρικών δεδομένων των Αιγυπτίων. Θεωρείται ότι είναι ο πρώτος που εφάρμοσε την ιδέα της απόδειξης. Η χρήση των ομοίων τριγώνων του επέτρεψε τον ακριβή υπολογισμό του ύψους και των πυραμίδων. Αναμφίβολα προετοίμασε τους Πυθαγορείους και απέδειξε πολλά θεωρήματα που περιέβαλε ο Ευκλείδης στα «Στοιχεία». Έτσι λοιπόν ο Θαλής δεν θεωρείται απλώς ως ο ευρετής της θεωρητικής γεωμετρίας , αλλά και ο εισηγητής της παγκόσμιας επιστήμης. Ακόμη ιστορικό είναι το επίτευγμα , που έσωσε ο Πλούταρχος, κατά το οποίον ο Θαλής κατέπληξε τον Φαραώ Άμασιν, όταν υπολόγισε το ύψος της μεγάλης πυραμίδος με την μέθοδο των αναλογιών. Ο Πυθαγόρας ο μέγας αυτός φιλόσοφος, μαθηματικός έδωσε νέα ώθηση στην γεωμετρία. Μάλιστα τα μισά περίπου από τα δέκα τρία βιβλία των «Στοιχείων» του Ευκλείδη, στηρίζονται σε εργασίες του Πυθαγόρα και της σχολής του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο. : ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1. ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ ΒΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ο Ευκλείδης γεννήθηκε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου το 325π.Χ. Ήταν Έλληνας μαθηματικός, που δίδαξε και πέθανε στην πόλη στην οποία γεννήθηκε το 265π.Χ.Στις μέρες μας είναι γνωστός ως ο "πατέρας" της Γεωμετρίας .Ο Ευκλείδης ήταν πηγή έμπνευσης για πολλούς μαθηματικούς εκείνης της εποχής όπως ο Θαλής, ο Εύδοξος και αρκετή άλλοι. Ο Ευκλείδης είχε την ικανότητα να ανασυντάξει τις αποδείξεις των θεωρημάτων σε σύντομους και αυστηρούς όρους.



ΕΙΚΟΝΑ 2: ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Αν και δεν επιβεβαιώνεται λέγεται πως ήταν μαθητής στην ακαδημία του Πλάτωνα μέχρι που ο τότε βασιλιάς Πτολεμαίος τον προκάλεσε να διδάξει στο νέο του πανεπιστήμιο στην Αλεξάνδρεια. Εκεί ο Ευκλείδης ίδρυσε την δική του μαθηματική σχολή και έμεινε εκεί μέχρι το τέλος της ζωής του. Μια ιστορία λέει πως ένας από τούς μαθητές του παραπονέθηκε πως δεν έχει να κερδίσει κάτι από τα μαθηματικά, τότε ο Ευκλείδης του έδωσε ένα νόμισμα λέγοντας "έπρεπε να κερδίσει κάτι από αυτά που μαθαίνει ".

Το σημαντικότερο σύγγραμμα του Ευκλείδη ήταν τα "Στοιχεία" που αποτελούταν από 13 βιβλία. Επιπλέον αποτελεί το σπουδαιότερο έργο των αρχαιοελληνικών μαθηματικών και είναι έως σήμερα η βάση των σχολικών βιβλίων. Άλλα έργα του είναι τα " τμήματα των αριθμών ", τα "φαινόμενα" και τα "οπτικά". Όλα έχουν την αγαπημένη του και βασική δομή των "Στοιχείων" με ορισμούς και αυστηρά αποδεδειγμένες προτάσεις.

ΕΙΚΟΝΑ 3: ΤΜΗΜΑ ΑΠΟ ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

Το πιο γνωστό του έργο λοιπόν είναι τα "Στοιχεία". Εκεί, οι ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων και των ακεραίων αριθμών προκύπτουν από ένα σύνολο αξιωμάτων, εμπνέοντας την αξιωματική μέθοδο των μοντέρνων μαθηματικών. Παρ' ότι πολλά από τα θεωρήματα που περιέχονταν στα Στοιχεία ήταν ήδη γνωστά, ένα από τα επιτεύγματα του Ευκλείδη ήταν ότι τα παρουσίασε σε ένα ενιαίο, λογικά συμπαγές πλαίσιο. Το έργο του Ευκλείδη ήταν τόσο σημαντικό ώστε η γεωμετρία που περιέγραψε στα Στοιχεία του (η βάση της οποίας είναι: έστω μία ευθεία ε και ένα σημείο Α όχι πάνω σε αυτήν την ευθεία, τότε υπάρχει μόνο μία ευθεία, παράλληλη της ε, που διέρχεται από το Α) ονομάστηκε Ευκλείδεια, ενώ τα Στοιχεία σήμερα θεωρούνται ένα από τα σημαντικότερα μαθηματικά έργα όλων των εποχών. Όταν ο Πτολεμαίος Α΄ του ζήτησε έναν πιο εύκολο τρόπο από τα Στοιχεία του για να μάθει Γεωμετρία η απάντηση του μεγάλου μαθηματικού ήταν: «Δεν υπάρχει βασιλική οδός για τη Γεωμετρία». Τα Στοιχεία μεταφράστηκαν σε αρκετές γλώσσες όπως τα λατινικά και τα Αραβικά. Έγιναν αγώνες για να επιβιώσουν τα στοιχεία από τις καταστροφές που έγιναν εκείνη την εποχή, όπως η καταστροφή της βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας. Το πρώτο τυπωμένο αντίγραφο βγήκε το 1482 και χρησιμοποιήθηκε ως το εγχειρίδιο της γεωμετρίας από το 1700. Επίσης τα Στοιχεία θεωρήθηκαν μια από τις καλύτερες μαθηματικές εργασίες όλων των χρόνων. Βέβαια στο έργο αυτό υπήρχαν μη κατανοητές περιοχές που συμπλήρωσαν οι επόμενοι μαθηματικοί. Επιπλέον έχουν βρεθεί κάποιες αμφισβητήσιμες ιδέες.

Παρόλα αυτά διακρίνεται ως ένα από τα πρώτα πρόσωπα που προσπάθησαν να τυποποιήσουν τα μαθηματικά και η προσπάθεια του αυτή έγινε αφετηρία για τις μελλοντικές γενεές.

2. ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Το αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι η μελέτη του **χώρου** και των **σχημάτων**, επίπεδων και στερεών, που μπορούν να υπάρξουν μέσα σε αυτόν. Μέσα στο χώρο βρίσκεται ο φυσικός κόσμος, στον οποίο ζούμε, και όλα τα αντικείμενα, μεγάλα ή μικρά, έμψυχα ή άψυχα. Στο χώρο διακρίνουμε τις **επιφάνειες**, τις **γραμμές** και τα **σημεία**. Οι επιφάνειες έχουν δύο διαστάσεις, οι γραμμές μία, τα σημεία καμία. Πάνω σε μια επιφάνεια μπορούμε να θεωρήσουμε γραμμές, οι οποίες μάλιστα μπορεί να την οριοθετούν. Εδώ χρειάζεται μια διευκρίνιση. Όλα τα υλικά αντικείμενα εκτείνονται σε τρεις διαστάσεις. Στην καθημερινή γλώσσα δεχόμαστε τις προσεγγίσεις, στη Γεωμετρία όχι. Λειτουργούμε αναγκαστικά με αφηρημένες έννοιες, που τις αποκαλούμε **όρους** της Γεωμετρίας. Η Γεωμετρία ήταν ο πρώτος κλάδος της ανθρώπινης γνώσης που διαμορφώθηκε ως επιστήμη και επί αιώνες ο μόνος. Το αντικείμενό της, ο χώρος και τα σχήματα, είναι και προσιτό και πλούσιο, πρόσφορο για θεωρητική μελέτη αλλά και για πρακτικές εφαρμογές. Από την εποχή του Αρχιμήδη και του Ήρωνα μέχρι σήμερα, τα πεδία εφαρμογής της Γεωμετρίας συνεχώς διευρύνονται. Για τα σπίτια που ζούμε, τα καράβια που ταξιδεύουμε ή τις επεξεργασμένες εικόνες της τηλεόρασης είναι αναγκαία η χρήση της Γεωμετρίας, άμεση ή έμμεση.

Η διαφοροποίηση της Πρακτικής Γεωμετρίας από τη Θεωρητική ή Ευκλείδεια Γεωμετρία, συνίσταται στη συστηματική χρήση της λογικής για να θεμελιώσει τις γνώσεις μας για το χώρο, ξεφεύγοντας από μετρήσεις και επιμέρους συμπεράσματα. Οι γνώσεις αυτές υπάρχουν ήδη: όλοι ξέρουν τι είναι κύκλος και τι τετράγωνο - οι αντίστοιχες λέξεις υπάρχουν σε όλες τις γνωστές γλώσσες. Πρόκειται όμως για γνώσεις σκόρπιες, ασύνδετες μεταξύ τους. Η Γεωμετρία τις θεμελιώνει, δηλαδή τις οργανώνει σε ένα σύστημα, και φυσικά προσθέτει και νέες γνώσεις σε αυτές που ήδη υπάρχουν. Κάθε καινούργιο αποτέλεσμα προκύπτει από τα προηγούμενα, χρησιμοποιώντας τη διαδικασία που λέγεται **απόδειξη** και που στηρίζεται στους κανόνες της Λογικής. Άρα **η Γεωμετρία προχωράει από το πιο απλό στο πιο σύνθετο.**

Η Ευκλείδεια γεωμετρία βασίζεται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη. Τον όρο «Στοιχεία» οι Αρχαίοι Έλληνες τον απέδιδαν σε κάθε σύστημα μαθηματικών προτάσεων και θεωρημάτων που βασιζόταν σε αξιώματα.

Ο Ευκλείδης κατάφερε με 5 αιτήματα να θεμελιώσει λογικά το σύνολο των γεωμετρικών γνώσεων και να δημιουργήσει 465 Προτάσεις και Θεωρήματα, πολλές από τις οποίες είναι πολύπλοκες και καθόλου διαισθητικά φανερές. Τα «Στοιχεία» αποτελούνται από 13 βιβλία. Τα πρώτα 6 πραγματεύονται την γνωστή μας Επιπεδομετρία, τα επόμενα 3 αναφέρονται στη Θεωρία Αριθμών το δέκατο βιβλίο αναφέρεται στη θεωρία των ασύμμετρων λόγων και τα τελευταία 3 αναφέρονται στην Στερεομετρία.

3. ΤΑ 5 ΑΙΤΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

Ο Ευκλείδης κατάφερε να δημιουργήσει τα εξής 5 αιτήματα:

Δυο διαφορετικά σημεία ορίζουν μοναδική ευθεία γραμμή, στην οποία τα σημεία αυτά ανήκουν.

Κάθε πεπερασμένη ευθεία προεκτείνεται κατά τρόπο συνεχή σε άπειρη ευθεία γραμμή.

Με οποιοδήποτε κέντρο και ακτίνα, γράφεται κύκλος.

Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.

Αν μια ευθεία γραμμή τέμνει δυο ευθείες γραμμές, έτσι ώστε το άθροισμα των δυο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών να είναι μικρότερο από 180ο, τότε οι δυο ευθείες αν επεκταθούν απεριόριστα θα συναντηθούν προς το μέρος που είναι οι γωνίες των οποίων το άθροισμα είναι μικρότερο των 180ο.

ΕΙΚΟΝΑ 4: ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ ΣΤΗΝ ΣΧΟΛΗ ΤΩΝ ΑΘΗΝΩΝ

• Ο Ευκλείδης, εκτός από τα 5 αιτήματα χρησιμοποίησε και τα 5 ακόλουθα αξιώματα ή κοινές έννοιες:

- Αυτά που είναι ίσα προς τρίτο είναι και μεταξύ τους ίσα.
- Αν σε ίσα προστεθούν ίσα, προκύπτουν πάλι ίσα.
- Αν από ίσα αφαιρεθούν ίσα, προκύπτουν πάλι ίσα.
- Αυτά που εφαρμόζουν το ένα πάνω στο άλλο, είναι μεταξύ τους ίσα.
- Το όλο είναι μεγαλύτερο από το μέρος.

• Τα πρώτα 3 αιτήματα αναφέρονται στη δυνατότητα να κατασκευάσουμε ευθύγραμμο τμήμα, να προεκτείνουμε ευθεία και να κατασκευάσουμε κύκλου με τη βοήθεια του κανόνα και του διαβήτη. Το $5^{ο}$ αίτημα καθορίζει ολόκληρη την Ευκλείδεια Γεωμετρία και αποτέλεσε την αφετηρία για την ανακάλυψη της σημερινής μη-Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

• Στις έννοιες Σημείο, Ευθεία και Επίπεδο δεν έδωσε τον ορισμό τους αλλά περιέγραψε τις ιδιότητές τους όπως παράδειγμα έγραψε:

- Σημείο είναι αυτό που δεν έχει μέρος.
- Γραμμή είναι μήκος χωρίς πλάτος.
- Επίπεδο είναι ότι έχει μήκος και πλάτος.

4. ΤΟ $5^{ο}$ ΑΙΤΗΜΑ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

Το τελευταίο από τα πέντε αιτήματα του Ευκλείδη ήταν το περίφημο αίτημα των παραλλήλων, σύμφωνα με το οποίο από κάθε σημείο εκτός ευθείας άγεται μοναδική παράλληλη προς την ευθεία.

Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

ΕΙΚΟΝΑ 5: Η ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ 5ΟΥ ΑΙΤΗΜΑΤΟΣ

«Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες».

Στις αρχές μέχρι και ο δημιουργός του, ο Ευκλείδης, είχε τις επιφυλάξεις του για το συγκεκριμένο αίτημα, καθώς διέφερε σε πολύ μεγάλο βαθμό απ' τα υπόλοιπα εξαιτίας της αναφοράς του στο άπειρο, η οποία ήταν λανθασμένη. Για το λόγο αυτό , απέφευγε να το χρησιμοποίει στα συμπεράσματά του. Και ήταν λανθασμένη διότι δύο ευθείες είναι παράλληλες αν και μόνο αν δεν τέμνονται πουθενά. Όμως σε μια πεπερασμένη περιοχή του χώρου, μπορούμε να χαράξουμε περισσότερες από μια ευθείες που να διέρχονται από ένα σημείο και να είναι παράλληλες προς την ευθεία (δηλαδή να μην την τέμνουν). Επομένως, το αίτημα των παραλλήλων συνδέεται έμμεσα με το άπειρο ενώ όπως είναι λογικό οι μαθηματικοί έχουν κάθε λόγο να χουν τις επιφυλάξεις τους για αυτό λόγω της διαίσθησής τους για το άπειρο.

Ήδη από την αρχαιότητα, ήταν πολλές οι προσπάθειες απόδειξής του, όμως όλες είχαν την ίδια κατάληξη. Την αντικατάσταση του 5ου αιτήματος με μια άλλη πρόταση πιο προφανή, η οποία εξ' ίσου δεν μπορούσε να αποδειχθεί.

Για το λόγο αυτό, μεταγενέστεροι μαθηματικοί, οι οποίοι δεν «προσπέρασαν» τις επιφυλάξεις του Ευκλείδη για το συγκεκριμένο στοιχείο, προσπάθησαν να αλλάξουν το περίεργο αξίωμα σε θεώρημα, φτιάχνοντάς το από τα τέσσερα άλλα αξιώματα. Αργότερα, τον 10^{o} αιώνα, οι μαθηματικοί άλλαξαν τακτική και επιχείρησαν να δείξουν ότι το 5^{o} αίτημα είναι αποτέλεσμα των πρώτων τεσσάρων. Για να το κάνουν αυτό, πήραν τα τέσσερα αξιώματα και την άρνηση του πέμπτου και προσπάθησαν να εντοπίσουν τυχόν αντιφάσεις. Μόνο που αντί για αντιφάσεις, ανακάλυψαν νέες πολύ διαφορετικές, γεωμετρίες , οι οποίες είχαν τεράστια σημασία για την μετέπειτα εξέλιξη των μαθηματικών!

Τέτοιες γεωμετρίες αναπτύχθηκαν στις αρχές του 19ου αιώνα και ονομάστηκαν μη-Ευκλείδειες γεωμετρίες. Έτσι στις μη-Ευκλείδειες γεωμετρίες δεχόμαστε ότι από σημείο εκτός ευθείας διέρχονται δύο παράλληλες προς αυτή (γεωμετρία Lobatchevsky), είτε ότι δεν διέρχεται καμία παράλληλη (γεωμετρία Riemann), οι οποίες βρίσκουν εφαρμογή σε κοίλε και κυρτές επιφάνειες αντίστοιχα.

Ίσως φαίνεται παράδοξο, στο χώρο μας, αλλά στο χώρο του σύμπαντος, σύμφωνα με την θεωρία της γενικής σχετικότητας του A. Einstein, «ταιριάζει» καλύτερα η γεωμετρία του Riemann. Η γενική θεωρία της σχετικότητας περιγράφει την σχέση της βαρύτητας με τον χωρόχρονο, επιτρέποντας τους κοσμολόγους να δώσουν πιθανές απαντήσεις σε ένα διπλό ερώτημα που μέχρι τώρα άνηκε στην σφαίρα της θρησκείας, του μυστικισμού και της φιλοσοφίας. Το σύμπαν θα τελειώσει; Και αν ναι, με ποιον τρόπο; Οι πιθανές απαντήσεις παίρνουν την μορφή τριών κοσμικών μοντέλων. Όλα αρχίζουν με την παραδοχή ότι το σύμπαν διαστέλλεται, πιθανών από την κοσμική έκρηξη, γνωστή ως Big Bang.

ΕΙΚΌΝΑ 6: ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ ΣΕ ΣΚΙΤΣΟ

Αν η μέση πυκνότητα ύλης στο σύμπαν είναι 3 άτομα υδρογόνου ανά κυβικό μέτρο, τότε υπάρχει ακριβώς τόση ύλη στον κόσμο, ώστε η βαρύτητα να ισορροπήσει τις δυνάμεις διαστολής. Τότε το τετραδιάστατο σύμπαν είναι επίπεδο και ισχύει η επίπεδη Ευκλείδεια γεωμετρία. Σε ένα τέτοιο σύμπαν η βαρύτητα θα επιβραδύνει με όλο και μικρότερο ρυθμό την διαστολή σταματώντας την τελικά στο άπειρο.

Αν η μέση πυκνότητα ύλης στο σύμπαν είναι μικρότερη από 3 άτομα υδρογόνου ανά κυβικό μέτρο, το τετραδιάστατο σύμπαν του χωροχρόνου είναι ανοιχτό. Οι βαρυτικές δυνάμεις δεν μπορούν να σταματήσουν την διαστολή. Σε ένα τέτοιο σύμπαν ισχύει η γεωμετρία Lobatchevsky.

Και τέλος αν η μέση πυκνότητα ύλης στο σύμπαν είναι μεγαλύτερη από 3 άτομα υδρογόνου ανά κυβικό μέτρο, το τετραδιάστατο σύμπαν του χωροχρόνου είναι κλειστό. Η βαρυτική έλξη θα σταματήσει την διαστολή και θα προκαλέσει κάποτε την συρρίκνωσή του, «Μεγάλη συμπίεση». Σε ένα τέτοιο σύμπαν ισχύει η γεωμετρία του Riemann και παραλληλίζεται με την εξωτερική (κυρτή) επιφάνεια μιας σφαίρας.

Γενικότερα:

Το 5ο αίτημα

- καθορίζει τη φύση σχεδόν ολόκληρης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.
- Η άρνηση της ισχύος του, αποτέλεσε την αφετηρία για την ανακάλυψη των λεγομένων σήμερα μη-Ευκλειδείων Γεωμετριών.

Η αξία της Ευκλείδειας Προσπάθειας για την απόδειξη του 5ου αιτήματος

- Διάσημοι μαθηματικοί και για πολλούς αιώνες, από τον Ποσειδώνιο (135-51 π.Χ.) μέχρι τον G.S. Klügel το 1763 μ.Χ. δεν κατάφεραν να αποδείξουν το 5ο αίτημα. Ο Klügel στη Διδακτορική του διατριβή, με την επίβλεψη του Καθηγητή A.G. Kästner στο Πανεπιστήμιο του Göttingen, με τίτλο «Μελέτη των πιο διάσημων προσπαθειών για την απόδειξη της θεωρίας των παραλλήλων», συμπέρανε ότι το 5ο αίτημα δεν μπορεί να αποδειχθεί. Έτσι, η μαθηματική σκέψη στράφηκε προς την ιδέα της αντικατάστασής του, διατηρώντας ακέραια τα 4 άλλα αξιώματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο} :ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ-RIEMANN

1. ΒΙΟΓΡΑΦΙΑ ΤΟΥ RIEMANN

Ο Μπέρναρντ Riemann ήταν από τους σημαντικότερους μαθηματικούς του 19^{ου} αιώνα μ.Χ. Γεννήθηκε στις 17 Σεπτεμβρίου 1826 στο Μπρέζελεντς, ένα χωριό στο κρατίδιο Ανόβερο της Γερμανίας, και απεβίωσε στις 20 Ιουλίου σε ηλικία 40 ετών από φυματίωση στο τρίτο του ταξίδι στην Ιταλία . Συνείσφερε τα μέγιστα σε διάφορους κλάδους των μαθηματικών και διακρίθηκε για το έργο του στη ‘Μη ευκλείδεια Γεωμετρία’. Ο D. Struik θέλοντας να δείξει την αξία του Riemann ανέφερε ότι: «με τον Riemann φτάνουμε στον άνθρωπο που επηρέασε περισσότερο από κάθε άλλον την πορεία των σύγχρονων Μαθηματικών».

ΕΙΚΟΝΑ 7: ΜΠΕΡΝΑΡΝΤ RIEMANN ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΑ ΤΟΥ RIEMANN ΤΟ 1863

Τα πρώτα χρόνια του Bernhard Riemann παρουσιάζουν ζωηρό ενδιαφέρον. Μεγάλωσε σε φτωχή οικογένεια, ο πατέρας του, Friedrich Bernhard Riemann, ήταν Λουθηρανός πάστορας, ενώ η μήτερα του πέθανε πριν αναπτυχθούν τα παιδιά της. Ο μικρός Georg Friedrich Bernhard Riemann, όπως είναι το πλήρες όνομά του ήταν ξεχωριστός από τα άλλα παιδιά αφού έκανε με αφάνταστη ταχύτητα τους μαθηματικούς υπολογισμούς. Το 1840 ο Riemann πήγε στο Ανόβερο να ζήσει με τη γιαγιά του, ώστε να σπουδάσει παραπέρα. Με το θάνατο της το 1842 ο Riemann φοίτησε στο Ιωάννειο Λύκειο στο Λούνενμπουργκ και μερικά χρόνια αργότερα άρχισε να μελετά Φιλολογία και Θεολογία ώστε να γίνει ιερέας και να βοηθήσει έτσι οικονομικά την οικογένειά του. Ο πατέρας του, όμως, μάζεψε κάποια χρήματα, ώστε, ο γιος του να σπουδάσει αυτό που ήθελε, Μαθηματικά. Έτσι, Τον έστειλε στο ονομαστό Πανεπιστήμιο του Γκέτινγκεν, όπου συνάντησε τον μεγάλο μαθηματικό Καρλ Φρίντριχ Γκάους και παρακολούθησε διαλέξεις του πάνω στη μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων.

Οι ικανότητες του Riemann τον έφεραν στο πλευρό εξαίρετων μαθηματικών της εποχής. Άρχισε να δίνει διαλέξεις το 1854 που θεμελίωσαν τη Γεωμετρία σε τέτοιο βαθμό ώστε σήμερα να αποκαλείται «Ριμάνεια». Το 1859 τελικά, μετά τον θάνατο των Γκάους και Ντίριχλετ, εκλέχθηκε καθηγητής μετά από μια αποτυχημένη προσπάθεια και επικεφαλής του Τμήματος Μαθηματικών εκεί. Υπήρξε ο πρώτος που εισηγήθηκε τη θεωρία των ανώτερων διαστάσεων, που απλοποίησε πολύ προβλήματα της Φυσικής, μέχρι σήμερα.

Ο Riemann ασχολήθηκε με τη Μαθηματική Ανάλυση, την Τοπολογία, την Αναλυτική Θεωρία των αριθμών και τη Διαφορική Γεωμετρία, προωθώντας τη μη ευκλείδεια Γεωμετρία. Πράγματι, η τελευταία ήταν διατριβή που του ζητήθηκε, ως φοιτητής, από τον καθηγητή του Γκάους με θέμα τη θεωρία του για τις ανώτερες διαστάσεις. Η εργασία του αυτή θεωρείται ακόμα μία από τις σημαντικότερες εργασίες για τη Γεωμετρία. Ο τίτλος της ήταν Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen «Επί των υποθέσεων που βρίσκονται στα θεμέλια της Γεωμετρίας». Αυτό που θεμελίωσε η παραπάνω εργασία ήταν η Ριμάνεια Γεωμετρία. Ο Riemann βρήκε τον σωστό τρόπο να επεκτείνει σε «ν» διαστάσεις τη Διαφορική Γεωμετρία των επιφανειών, την οποία ο ίδιος ο Γκάους είχε αποδείξει με το theorema egregium. Το σημαντικό ήταν ο τανυστής καμπυλότητας Riemann, που είναι ο πιο συνηθισμένος τρόπος για να εκφραστεί η καμπυλότητα στις πολλαπλότητες Riemann.


VI. Theorie der Abel'schen Functionen. 127

der Linien a um 0 und der Linie b_ν um $-2(u_\nu - \sum_1^p \alpha_\nu^{(\nu)})$ grösser wird, als auf der negativen. Zur Bestimmung dieser Anfangswerthe werden sich später leichtere Mittel darbieten, als der obige Integralausdruck für k_μ.

23.

Setzt man $(u_1, u_2, \ldots, u_p) \equiv (\alpha_1^{(\nu)}, \alpha_2^{(\nu)}, \ldots, \alpha_p^{(\nu)})$ nach den $2p$ Modulsystemen der Functionen u (§. 15), also

$$(v_1, v_2, \ldots, v_p) = \left(-\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\nu)}, -\sum_1^{p-1} \alpha_2^{(\nu)}, \ldots, -\sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\nu)}\right),$$

so wird $\vartheta = 0$. Wird umgekehrt $\vartheta = 0$ für $v_\mu = r_\mu$, so ist $(r_1, r_2, \ldots, r_p)$ einem Grössensysteme von der Form

$$\left(-\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\nu)} - \sum_1^{p-1} \alpha_2^{(\nu)}, \ldots, -\sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\nu)}\right)$$

congruent. Denn setzt man $v_\mu = u_\mu - \alpha_\mu^{(p)} + r_\mu$, indem man η_p beliebig wählt, so wird die Function ϑ ausser in η_p noch in $p-1$ andern Punkten unendlich klein von der ersten Ordnung, und bezeichnet man diese durch $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-1}$, so ist

$$\left(-\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\nu)}, -\sum_1^{p-1} \alpha_2^{(\nu)}, \ldots, -\sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\nu)}\right) \equiv (r_1, r_2, \ldots, r_p).$$

Die Function ϑ bleibt ungeändert, wenn man sämmtliche Grössen v in's Entgegengesetzte verwandelt; denn verwandelt man in der Reihe für $\vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ sämmtliche Indices m in's Entgegengesetzte, wodurch der Werth der Reihe ungeändert bleibt, da $-m_\nu$ dieselben Werthe wie m_ν durchläuft, so geht $\vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ über in $\vartheta(-v_1, -v_2, \ldots, -v_p)$.

Nimmt man nun die Punkte $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-1}$ beliebig an, so wird $\vartheta(-\sum_1^{p-1}\alpha_1^{(\nu)}, \ldots, -\sum_1^{p-1}\alpha_p^{(\nu)}) = 0$ und folglich, da die Function ϑ wie eben bemerkt gerade ist, auch $\vartheta(\sum_1^{p-1}\alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \sum_1^{p-1}\alpha_p^{(\nu)}) = 0$. Es lassen sich also die $p-1$ Punkte $\eta_p, \eta_{p+1}, \ldots, \eta_{2p-2}$ so bestimmen, dass

$$\left(\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\nu)}\right) \equiv \left(-\sum_p^{2p-2} \alpha_1^{(\nu)}, \ldots, -\sum_p^{2p-2} \alpha_p^{(\nu)}\right)$$

und folglich

Εικονα 8: Συγχρονο αντιγραφο κομματι της εργασια του Riemann.

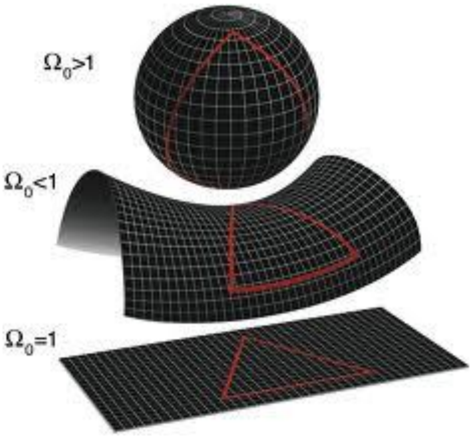
2. Η ΑΡΧΗ:

Το 1854 ο Riemann έπρεπε να δώσει μια δοκιμαστική διάλεξη για να καταλάβει

θέση λέκτορα στο Πανεπιστήμιο του Γκέτινγκεν, κάτι που δεν θα του εξασφάλιζε κάποιο μισθό αλλά μόνο μερίδιο από τα δίδακτρα των τυχόν σπουδαστών που θα επέλεγαν να παρακολουθήσουν τα μαθήματά του. Έπρεπε να δώσει στον Γκάους και στους υπόλοιπους εξεταστές τρία θέματα για τα οποία είχε ετοιμάσει μια διάλεξη, και εκείνοι θα επέλεγαν το ένα.

Όταν τελικά έδωσε τη διάλεξή του στο Γκέτινγκεν το 1854, κατά το τέλος της, το μαθηματικό κοινό την υποδέχθηκε με ενθουσιασμό ενώ ο Riemann εξήγησε ότι η αξία μιας τέτοιας έρευνας βρίσκεται ίσως στη δυνατότητά της να μας απελευθερώσει από έτοιμες ιδέες, όταν έρθει κάποτε ο καιρός που η εξερεύνηση των φυσικών νόμων θα απαιτήσει κάποια γεωμετρία διαφορετική από την Ευκλείδεια. Αυτά τα προφητικά λόγια έγιναν πραγματικότητα κάπου πενήντα χρόνια μετά το θάνατό του, με τη γενική θεωρία της σχετικότητας του Άινστάιν.

Η εργασία αυτή θεωρείται ακόμα μία από τις σημαντικότερες εργασίες για τη Γεωμετρία. Ο τίτλος της ήταν Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen («Επί των υποθέσεων που βρίσκονται στα θεμέλια της Γεωμετρίας»). Ήταν η εργασία για την οποία ο Riemann είχε προετοιμαστεί λιγότερο.



ΕΙΚΟΝΑ 9:ΟΙ ΓΩΝΙΕΣ ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ ΠΟΥ ΥΠΑΡΧΟΥΝ

Ο Riemann βρήκε τον σωστό τρόπο να επεκτείνει σε «ν» διαστάσεις τη Διαφορική Γεωμετρία των επιφανειών, την οποία ο ίδιος ο Γκάους είχε αποδείξει με το θεώρημα egregium. Το θεμελιώδες εδώ είναι ο Τανυστής καμπυλότητας Ρίμαν. Για την περίπτωση μιας επιφάνειας, αυτός μπορεί να αναχθεί σε ένα αριθμό (βαθμωτό), θετικό, αρνητικό ή μηδέν: οι μη μηδενικές και σταθερές περιπτώσεις είναι τα μοντέλα των γνωστών μη ευκλείδειων γεωμετριών.

Ο Γερμανός μαθηματικός Riemann ήρθε να στηρίξει, αλλά και να επεκτείνει τις νέες ιδέες, απ' τη μια μεριά με τις μελέτες του για την Ελλειπτική Γεωμετρία, και απ' την άλλη με τη γενίκευση των Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών (σύγχρονη θεωρία των διαφορικών πολλαπλοτήτων). Η μη Ευκλείδεια γεωμετρία του Riemann είναι περισσότερο μαθηματική δημιουργία. Το αξίωμα του Ευκλείδη μάς λέει τι πρέπει να συμβαίνει στο φυσικό χώρο πολύ μακρύτερα απ' την ανθρώπινη εμπειρία.

3. ΤΑ ΑΙΤΗΜΑΤΑ ΤΟΥ RIEMANN

Μολονότι το 2ο Αίτημα του Ευκλείδη βεβαιώνει ότι μια ευθεία γραμμή μπορεί να επεκταθεί απεριόριστα, για τον Riemann, αυτό δεν συνεπάγεται αναγκαστικά ότι μια ευθεία γραμμή έχει άπειρο μήκος, απλώς σημαίνει πως η εν λόγω είναι χωρίς τέλος ή χωρίς όριο. Παραδείγματος χάριν, το τόξο ενός μέγιστου κύκλου που συνδέει δύο σημεία μιας σφαίρας μπορεί να προεκτείνεται απεριόριστα κατά μήκος του μέγιστου κύκλου, κάνοντας το προεκτεινόμενο τόξο χωρίς τέλος, αλλά σίγουρα δεν είναι άπειρο σε μήκος. Είναι φανερό ότι μια ευθεία γραμμή μπορεί να συμπεριφέρεται όμοια και ότι μια πεπερασμένη προέκτασή της μπορεί να επιστρέψει στον εαυτό της.

ΕΙΚΟΝΑ 10:Ο RIEMANN ΣΕ ΝΕΑΝΙΚΗ ΗΛΙΚΙΑ

Με αυτή την ερμηνεία του Riemann για τις έννοιες του απεριόριστου και του απείρου, αποδείχθηκε ότι μπορεί κανείς να κατανοήσει και να αναπτύξει μια εσωτερικά συνεπή Γεωμετρία στην οποία ικανοποιείται η υπόθεση της Αμβλείας γωνίας.

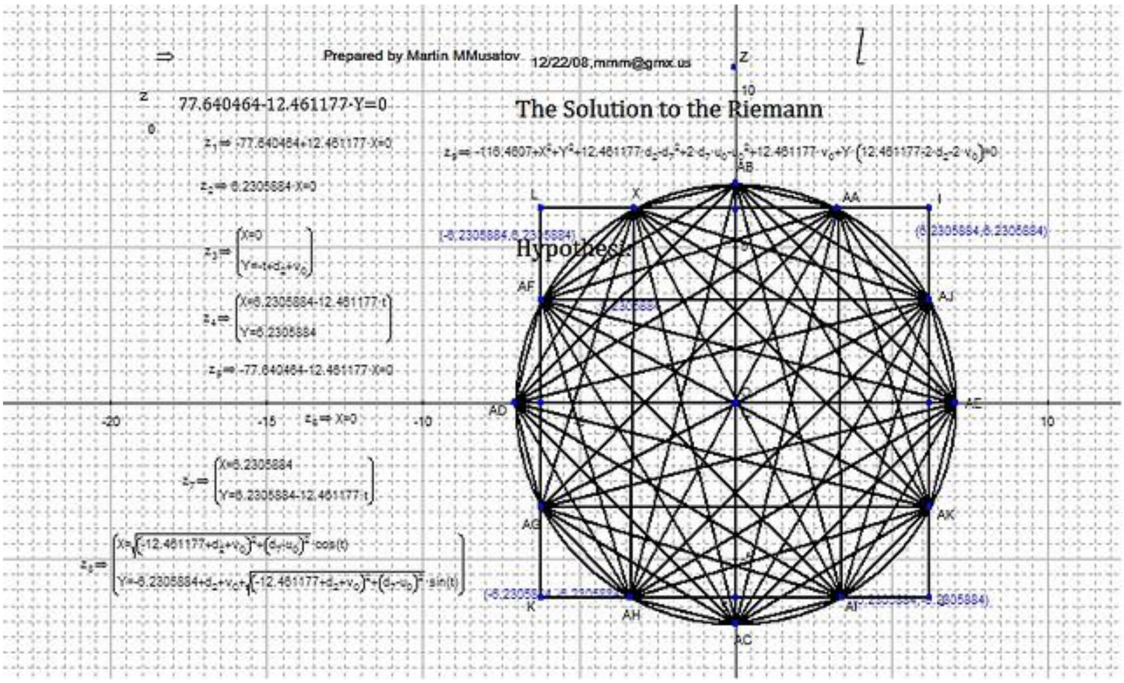
Πιο συγκεκριμένα, αν τα αιτήματα 1, 2 και 5 του Ευκλείδη τροποποιηθούν

κατάλληλα ώστε:

- 1΄. Δύο διαφορετικά σημεία ορίζουν τουλάχιστον μια ευθεία γραμμή.
- 2΄. Μια ευθεία γραμμή είναι απεριόριστη.
- 5΄. Δύο οποιεσδήποτε ευθείες γραμμές ενός επιπέδου τέμνονται.
- Και διατηρήσουμε τα άλλα δύο αιτήματα του Ευκλείδη ως έχουν:
- 3. Με οποιοδήποτε σημείο ως κέντρο και με οποιαδήποτε ακτίνα μπορεί να γραφεί
- Κύκλος.
- 4. Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.

Τότε προκύπτουν τα αξιώματα μιας δεύτερης Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας που σήμερα είναι γνωστή ως Γεωμετρία Riemann.

Ο Riemann δεν ήταν ένας καθαρός γεωμέτρης ούτε και εξέτασε το πρόβλημα με το γεωμετρικό τρόπο που ακολούθησαν οι Lobachevsky και Bolyai στα δικά τους γεωμετρικά συστήματα. Ήταν ένας μαθηματικός της Ανάλυσης που απλώς χρησιμοποίησε μια γεωμετρική υπόθεση σαν υπόβαθρο της. Η Γεωμετρία του Riemann δεν είναι τίποτα άλλο από ένα αξίωμα της εργασίας στην Ανάλυσης με εξαίρεση τους τύπους που συνιστούν την αναπαράσταση μιας συνάρτησης μέσω τριγωνομετρικών σειρών. Αυτό το μέρος της δουλειάς του δεν θα μας απασχολήσει στην παρούσα εργασία, αλλά μόνο οι θεμελιώδεις υποθέσεις του.



ΕΙΚΌΝΑ 11: Η ΥΠΟΘΕΣΗ ΤΟΥ RIEMANN

Ο Riemann δεν ασχολήθηκε διεξοδικά με τις εφαρμογές της νέας του Γεωμετρίας.

4. ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ:

Ο Riemann προσέφερε πολλά στην Πραγματική Ανάλυση: όρισε το ολοκλήρωμα Riemann με τη βοήθεια των αθροισμάτων Riemann, ανέπτυξε μια θεωρία για τις τριγωνομετρικές σειρές που δεν είναι σειρές Φουριέ — ένα πρώτο βήμα για μια θεωρία των γενικευμένων συναρτήσεων — και μελέτησε το διαφορικό ολοκλήρωμα Ρίμαν-Λιουβίλ.

Πολύ γνωστές είναι και κάποιες συνεισφορές του Riemann στη σύγχρονη Αναλυτική Θεωρία των αριθμών. Σε μία και μόνη σύντομη δημοσίευση (τη μοναδική του επί της

Αριθμοθεωρίας), εισήγαγε τη Συνάρτηση ζ του Riemann και έδειξε τη σημασία της για την κατανόηση της κατανομής των πρώτων αριθμών. Διετύπωσε μια σειρά από εικασίες σχετικές με ιδιότητες της συναρτήσεως ζ, μία από τις οποίες είναι η περιβόητη Υπόθεση Riemann.

Ο Riemann εφάρμοσε την Αρχή του Dirichlet από τον Λογισμό των μεταβολών με σπουδαία αποτελέσματα. Η εργασία του στη μονοδρομία και στην υπεργεωμετρική συνάρτηση στους μιγαδικούς έκανε μεγάλη εντύπωση και καθιέρωσε μια βασική μέθοδο εργασίας με συναρτήσεις «λαβαίνοντας υπόψη μόνο τις ανωμαλίες τους».

Τελικά, ήρθε και η πειραματική επαλήθευση μερικών βασικών προβλέψεων της θεωρίας της σχετικότητας (όπως η καμπύλωση των φωτεινών ακτινών στο διάστημα), που δεν μπορούσε να εξηγήσει η στηριγμένη στην παραδοχή ενός απόλυτου Ευκλείδειου χώρου κλασική Φυσική και αυτή η επαλήθευση υπήρξε η πανηγυρική δικαίωση των πρωτοπόρων δημιουργών της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Το έργο του Riemann άνοιξε νέες ερευνητικές περιοχές συνδυάζοντας την Ανάλυση με τη Γεωμετρία. Εκτός από τη Ριμάνεια Γεωμετρία, η θεωρία των επιφανειών Riemann αναπτύχθηκε παραπέρα από τους Φέλιξ Κλάιν και Άντολφ Χούρεβιτς και σήμερα συνιστά ένα από τα θεμέλια της Τοπολογίας, ενώ εφαρμόζεται ακόμα με νέους τρόπους στη Μαθηματική Φυσική.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο. ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ - LOBACHEVSKY

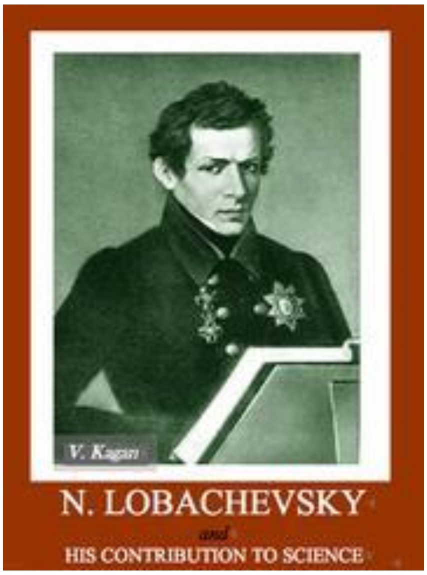
1. ΒΙΟΓΡΑΦΙΑ:NIKOLAY IVANOVICH LOBACHEVSKY (1792-1856)

Ο Νικολάι Ιβάνοβιτς Λομπατσέφσκι ήταν ένας σπουδαίος Ρώσος μαθηματικός και θεωρείται ο θεμελιωτής της μη ευκλείδειας γεωμετρίας. Σπούδασε στο πανεπιστήμιο του Καζάν και έγραψε διδακτορική διατριβή με θέμα την ουράνια μηχανική. Επίσης, μελέτησε την έννοια του χώρου και τόνισε μαθηματικά τη θεωρία της σχετικότητας. Η γεωμετρία του βασίζεται στο ότι από ένα σημείο που βρίσκεται εκτός ευθείας μπορούν να αχθούν προς αυτήν πολλές παράλληλες, ενώ η ευκλείδεια γεωμετρία δέχεται ότι μόνο μία παράλληλη φέρεται. Οι ιδέες του άνοιξαν ευρείς ορίζοντες για την αστρονομία, τη φυσική, καθώς και τη μηχανική. Μέχρι το θάνατό του (1856) ήταν πρύτανης στο πανεπιστήμιο του Καζάν.

ΕΙΚΟΝΑ 12: NIKOLAY IVANOVICH LOBACHEVSKY

Ο Νικολάι Ιβάνοβιτς Λομπατσέφσκι ήταν ένας κορυφαίος μαθηματικός και πανεπιστημιακός. Ο Λομπατσέφσκι από τα 14 βρέθηκε στα έδρανα του Πανεπιστημίου του Καζάν και από τα 22 στην έδρα του καθηγητή Μαθηματικών στο ίδιο πανεπιστήμιο. Το 1823 κατέθεσε στην Ακαδημία της Αγίας Πετρούπολης τη δική του θεωρία για τη Γεωμετρία που ανέτρεπε την κυρίαρχη επί 2.000 χρόνια ευκλείδεια αντίληψη και εισήγαγε τη γνωστή σήμερα ως «υπερβολική γεωμετρία», της οποίας θεωρείται ο θεμελιωτής. Το έργο του αυτό, το οποίο τελειοποίησε το1829– αφού ένα χειρόγραφό του από το 1826 έχει χαθεί– προηγήθηκε κατά τρία χρόνια του αντίστοιχου έργου του Γιάνος Μπολιέ, ο οποίος όμως αγνοούσε εκείνο του Λομπατσέφσκι. Πιο γνωστό είναι το τελευταίο του έργο, με τίτλο «Πανγεωμετρία» (1855-56). Το έργο του αυτό μετέφρασε στην ιταλική γλώσσα το 1867 ο Μπελτράμι, ο οποίος κατασκεύασε πρώτος πλήρες υπόδειγμα μη ευκλείδειας (υπερβολικής) γεωμετρίας.

Στην όλη γεωμετρική θεωρία του Λομπατσέφσκι υπάρχει έμμεσα η έννοια της καμπυλότητας του χώρου, γι αυτό ο Ρώσος μαθηματικός μπορεί να θεωρηθεί ως πρωτοπόρος στη μη ευκλείδεια κοσμολογία αλλά και ως πρόδρομος της θεωρίας της σχετικότητας. Παρόμοια αντίληψη διατύπωσε τότε και ο Ούγγρος μαθηματικός Γιάννος Μπόλιαϊ. Μόνο ο Γκάους πρόσεξε στην αρχή την εργασία του Λομπατσέφσκι. Επί δεκαετίες απορρίπτονταν μέχρι που και ο Ρίμαν «πάτησε» πάνω της. Με την ανατροπή της ευκλείδειας γεωμετρίας συνέβαλε καθοριστικά στην εξέλιξη των Μαθηματικών και κατατάχθηκε στους κορυφαίους επιστήμονες όλων των εποχών. Αργότερα όταν το πρώτο πόνημα του Ρώσου «Επί των αρχών της γεωμετρίας» μεταφράστηκε στα γερμανικά, οι πάντες υποκλίθηκαν Ακολούθησαν μεταφράσεις και στα υπόλοιπα έργα του και ο Λομπατσέφκσι δικαιώθηκε όπως πολλοί μετά θάνατον Συνεισφορά μεγάλη είχε και στην Άλγεβρα με τις δημοσιευμένες συμπληρώσεις που έκανε στο έργο του Γκάους για τις διωνυμικές εξισώσεις.



ΕΙΚΟΝΑ 13: NIKOLAY IVANOVICH LOBACHEVSKY

Για τον Λ., το περίφημο πέμπτο «ευκλείδειο αίτημα» (ότι από κάθε σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μία και μόνο μία παράλληλος της ευθείας) ήταν μια αυθαίρετη, μη αποδεδειγμένη και μη επιβεβαιώσιμη πειραματικά υπόθεση. Στην υπερβολική γεωμετρία το πέμπτο αίτημα μετατρέπεται ως εξής: «από κάθε σημείο εκτός ευθείας διέρχονται άπειρες παράλληλες ευθείες σε αυτήν». Ο Λ. ασχολήθηκε επίσης με την αστρονομία. Οι σχετικές εργασίες του αποσκοπούσαν να επαληθεύσουν αν η κοινή (ευκλείδεια) γεωμετρία διατηρεί την ισχύ της «εν μεγάλω».

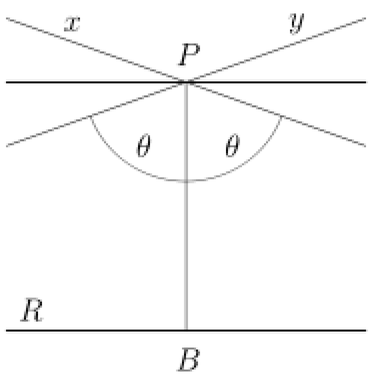
2. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΛΟΜΠΑΤΣΕΦΣΚΙ

Στα μαθηματικά, η υπερβολική γεωμετρία (επίσης ονομάζεται γεωμετρία του Λομπατσέφσκι (Лобачéвский),ή φανταστική γεωμετρία) είναι μια μη-ευκλείδεια γεωμετρία, δηλαδή μια γεωμετρία στην οποία ορισμένα από τα αξιώματα της ευκλείδειας γεωμετρίας δεν ισχύουν. Συγκεκριμένα, στην υπερβολική γεωμετρία δεν ισχύει το αξίωμα των παραλλήλων. Αυτό που σκέφτηκε ο Lobachevsky ήταν ότι το πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη δεν μπορεί να αποδειχτεί από τα υπόλοιπα αξιώματα και αιτήματα της ευκλείδειας γεωμετρίας. Έτσι λοιπόν, σαν υπόθεση πήρε το αντίθετο του αξιώματος της παραλληλίας το οποίο ονομάζεται Αξίωμα του Lobachevsky:"Υπάρχει ευθεία g και σημείο A εκτός αυτής, έτσι ώστε από το A να διέρχονται τουλάχιστον δύο ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο με την g και δεν την τέμνουν".

Συνεπώς, ο Lobachevsky προσάρτησε στα βασικά αξιώματα της ευκλείδειας γεωμετρίας, αντί του αξιώματος της παραλληλίας το παραπάνω αξίωμα, με αποτέλεσμα να μπορεί να αναπτυχθεί μια τέλεια και κατανοητή γεωμετρία, διαφορετική από την ευκλείδεια. Έτσι λοιπόν, στην γεωμετρία αυτή, ο Lobachevsky βρήκε όλα τα αποτελέσματα που είναι ανάλογα με αυτά της ευκλείδειας γεωμετρίας, δηλαδή από την μη ευκλείδεια τριγωνομετρία και την επίλυση τριγώνων, μέχρι τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων.

Έχουν κατασκευαστεί μοντέλα εντός της ευκλείδειας που υπακούν στα αξιώματα της υπερβολικής γεωμετρίας, το οποίο δείχνει ότι το αξίωμα των παραλλήλων είναι ανεξάρτητο από τα άλλα αξιώματα του Ευκλείδη.

Δεν υπάρχει ακριβές υπερβολικό αντίστοιχο των ευκλείδειων παράλληλων ευθειών, με αποτέλεσμα η χρήση του όρου παράλληλο να ποικίλει ανάμεσα στους συγγραφείς. Δύο γραμμές που δεν τέμνονται όσο κι αν τις επεκτείνουμε ονομάζονται ασυμπτωτικές ενώ δύο γραμμές που έχουν μία κοινή κάθετο ονομάζονται υπερπαράλληλες. Η απλή λέξη παράλληλη μπορεί να αναφέρεται και στα δύο είδη γραμμών.



Εικονα 14:ΓΡΑΜΜΕΣ ΠΟΥ ΔΙΕΡΧΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΔΕΔΟΜΕΝΟ ΣΗΜΕΙΟ P

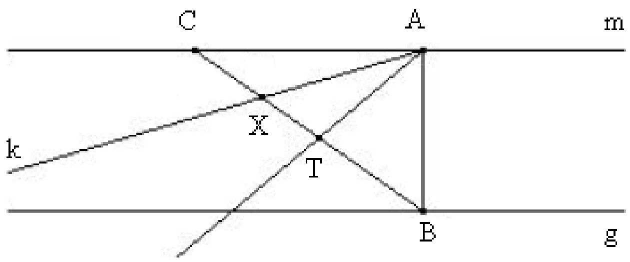
Μία χαρακτηριστική ιδιότητα της υπερβολικής γεωμετρίας είναι ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου αντιστοιχεί σε λιγότερο από μία ευθεία, δηλαδή είναι $<180^o$ (που αντιστοιχεί σε ημικύκλιο).

Στο όριο, καθώς οι κορυφές πηγαίνουν προς το άπειρο, υπάρχουν ακόμη και ιδεατά υπερβολικά τρίγωνα με άθροισμα γωνιών 0 μοίρες.

3. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ, ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΟΥ ΛΟΜΠΑΤΣΕΦΣΚΙ

ΠΡΟΤΑΣΗ 1. Έστω τυχούσα ευθεία g και τυχόν σημείο A που δεν ανήκει στη g . Τότε από το A διέρχονται άπειρες ευθείες που δεν τέμνουν την g και ανήκουν στο ίδιο επίπεδο με αυτήν.

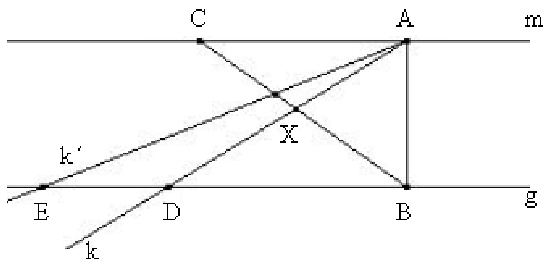
ΠΡΟΤΑΣΗ 2. (Θεμελιώδες θεώρημα της παραλληλίας στην υπερβολική γεωμετρία). Έστω ευθεία g, σημείο A εκτός αυτής και η προβολή B του A στην g. Τότε υπάρχουν δύο μοναδικές ημιευθείες Ak, Al, δεξιά και αριστερά του ευθύγραμμου τμήματος AB, που δεν τέμνουν την g τέτοιες ώστε να ισχύουν τα εξής:



i) Οποιαδήποτε ευθεία που περνά από το A και βρίσκεται στην γωνία που σχηματίζουν οι Ak, Al και το ευθύγραμμο τμήμα AB να τέμνει την ευθεία g.

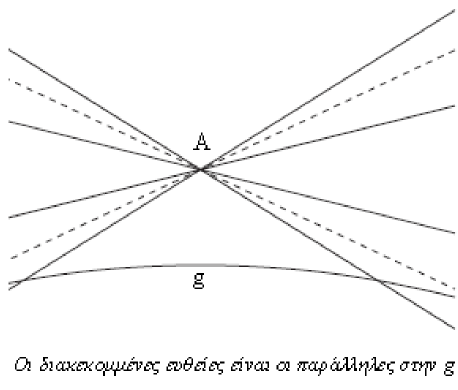
ii) Οι γωνίες <(A, B, k) , <(A, B, l) είναι ίσες και οξείες

ΠΡΟΤΑΣΗ 3. Έστω ευθεία g και σημείο A εκτός αυτής. Αν η k που περνά από το A είναι η δεξιά <u>οριακή ευθεία*</u> της g, τότε θα είναι δεξιά οριακή ευθεία της g για κάθε σημείο A΄ που ανήκει στο k.



(*Οριακές ευθείες της g ονομάζονται οι ευθείες στις οποίες βρίσκονται οι ημιευθείες που δεν τέμνουν την g)

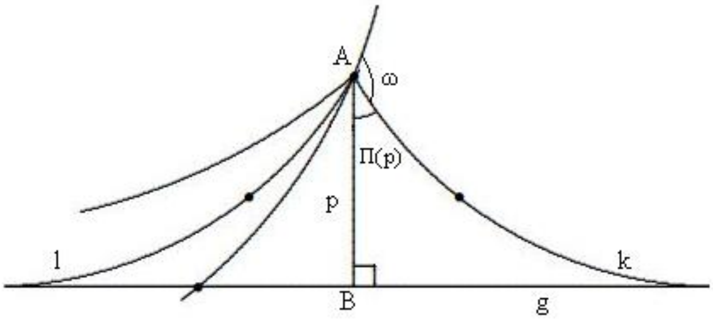
ΟΡΙΣΜΟΣ 1. Η γωνία Π(p) που σχηματίζεται από το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα AB (όπου B η προβολή του A πάνω στην g) και μια από τις οριακές ημιευθείες Ak, Al ονομάζεται γωνία παραλληλίας.



Οι διακεκομμένες ευθείες είναι οι παράλληλες στην g που διέρχονται από το σημείο A

ΠΟΡΙΣΜΑ 1. Οι ευθείες που βρίσκονται μέσα στις γωνιακές περιοχές, που σχηματίζουν οι κατακορυφήν γωνίες ω και δημιουργούνται από τις παράλληλες ευθείες, δεν τέμνουν την ευθεία g.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2. Οι ευθείες που δεν είναι παράλληλες στην ευθεία g και δεν την τέμνουν ονομάζονται αποκλίνουσες ή υπερπαράλληλες, προς την g.

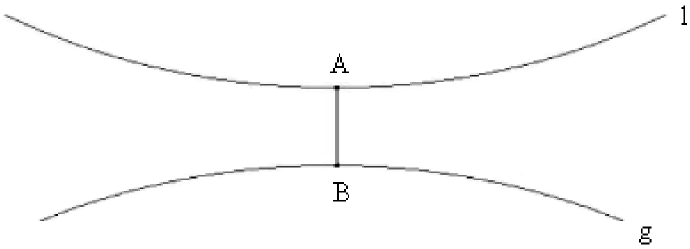


ΟΡΙΣΜΟΣ 3. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα σημεία τομής της κοινής καθέτου δύο παράλληλων ευθειών, λέγεται απόσταση των παραλλήλων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4. Η γωνία παραλληλίας μικραίνει καθώς η απόσταση από την ευθεία μεγαλώνει.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2. Αν το σημείο C της προηγούμενης πρότασης τείνει στο άπειρο, τότε η γωνία παραλληλίας τείνει στο μηδέν

ΠΡΟΤΑΣΗ 5. Η απόσταση ανάμεσα σε δύο τεμνόμενες ευθείες αυξάνεται απεριόριστα.



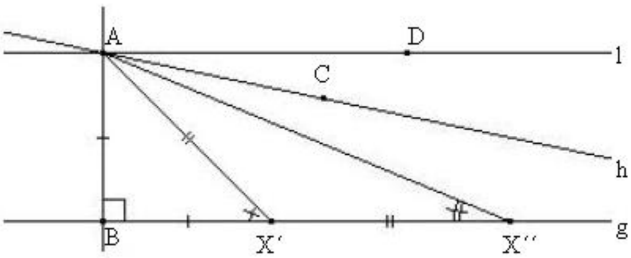
Υπερπαράλληλες Ευθείες.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6. Η απόσταση μεταξύ δύο παραλλήλων μικραίνει κατά τη διεύθυνση της παραλληλίας και τείνει στο μηδέν, ενώ μεγαλώνει (τείνει στο άπειρο) κατά την αντίθετη διεύθυνσης της παραλληλίας.

4. ΤΡΙΓΩΝΑ ΣΤΗΝ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΤΑΣΗ 7. Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο των 180 μοιρών.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3. Το άθροισμα των γωνιών κάθε κυρτού τετραπλεύρου είναι
μικρότερο των 360 μοιρών.



ΠΟΡΙΣΜΑ 4. Στην υπερβολική γεωμετρία δεν υπάρχουν ορθογώνια παραλληλόγραμμα

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΣΤΗΝ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1ο Κριτήριο Ισότητας Τριγώνων (Π-Π-Π): Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

2ο Κριτήριο Ισότητας Τριγώνων (Π-Γ-Π): Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

3ο Κριτήριο Ισότητας Τριγώνων (Γ-Π-Γ): Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

4ο Κριτήριο Ισότητας Τριγώνων (Γ-Γ-Π). Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά ίση, μια προσκείμενη γωνία στην πλευρά αυτή ίση και την απέναντι από αυτή την πλευρά γωνία ίση, τότε είναι ίσα.

5ο Κριτήριο Ισότητας Τριγώνων (Γ-Γ-Γ). Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία τότε είναι ίσα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8. Αν δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ είναι όμοια, τότε είναι ίσα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4. Η διαφορά του αθροίσματος των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ από τις 180 μοίρες ονομάζεται έλλειμμα του τριγώνου.

ΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΠΡΟΤΑΣΗ 9. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ένας θετικός αριθμός με τις εξής ιδιότητες:

i) Ίσα τρίγωνα έχουν ίσα εμβαδά.
ii) Αν ένα τρίγωνο είναι ένωση τριγώνων που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, τότε το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων που το αποτελούν.

ΠΡΟΤΑΣΗ 10. Για δύο οποιαδήποτε τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ ισχύει το εξής:
α(ΑΒΓ)/δ(ΑΒΓ)=α(ΔΕΖ)/δ(ΔΕΖ),

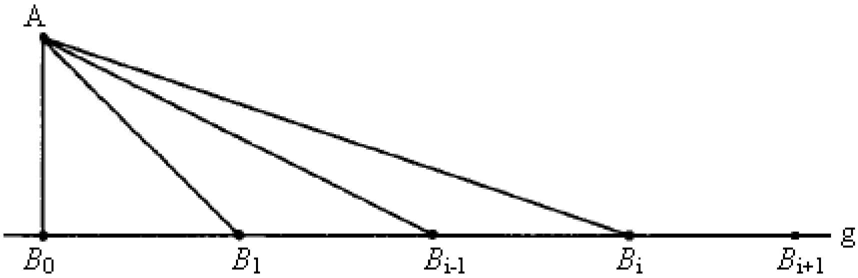
όπου (α) το εμβαδόν, (δ) το έλλειμμα του τριγώνου ΑΒΓ και (k) θετική σταθερά για κάθε τρίγωνο ΑΒΓ

ΠΡΟΤΑΣΗ 11. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ανάλογο του ελλείμματος, δηλαδή ισχύει : α(ΑΒΓ)=kδ(ΑΒΓ)

ΠΟΡΙΣΜΑ 5. Από τον τύπο της παραπάνω πρότασης φαίνεται ότι όταν το εμβαδόν αυξάνεται, το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ελαττώνεται.

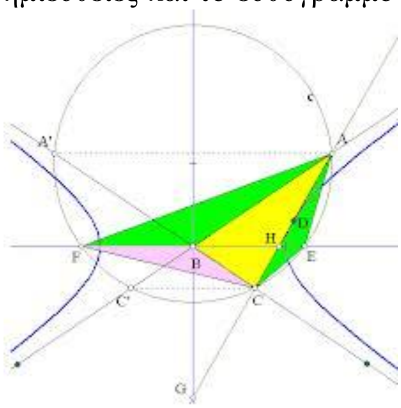
ΠΟΡΙΣΜΑ 6. Τα τρίγωνα με μικρό εμβαδόν έχουν μικρό έλλειμμα και το άθροισμα των γωνιών τους πλησιάζει τις 180 μοίρες.

ΠΡΟΤΑΣΗ 12. Στην υπερβολική γεωμετρία υπάρχουν τρίγωνα που έχουν το ίδιο ύψος και την ίδια βάση αλλά διαφορετικά εμβαδά.



ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ 5. Το σχήμα που αποτελείται από δύο παράλληλες ημιευθείες και το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από τις αρχές των δύο αυτών ημιευθειών ονομάζεται ασυμπτωτικό τρίγωνο.

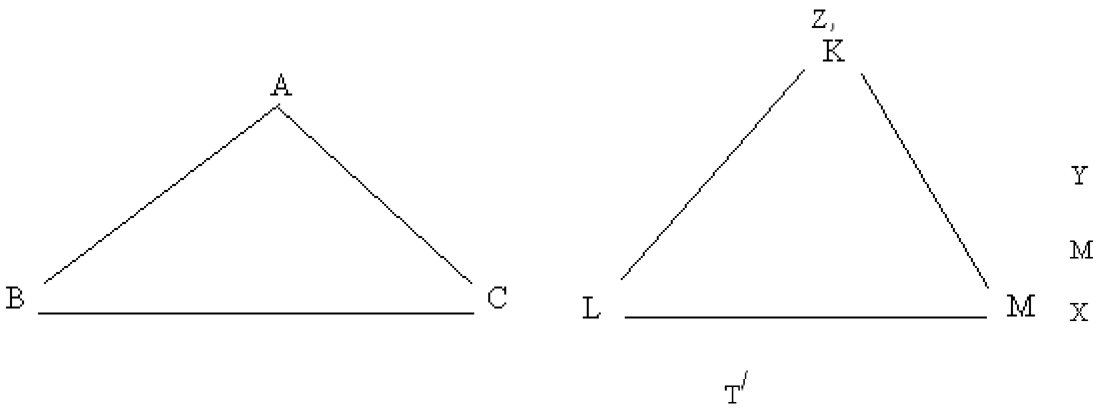


ΕΙΚΟΝΑ 15: ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

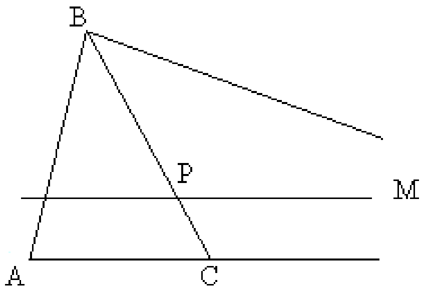
ΟΡΙΣΜΟΣ 6. Τα σημεία Α, Β και το επ' άπειρο σημείο Μ λέγονται κορυφές του ασυμπτωτικού τριγώνου. Οι ημιευθείες ΑΧ, ΒΥ και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ λέγονται πλευρές του ασυμπτωτικού τριγώνου. Η πλευρά ΑΒ για διάκριση από τις άλλες λέγεται πεπερασμένη πλευρά .

ΟΡΙΣΜΟΣ 7. Οι γωνίες (Α Β Χ) ,(Β Α Υ) λέγονται γωνίες του ασυμπτωτικού τριγώνου. Αν τα σημεία Τ, Α, Β, Ζ είναι συνευθειακά, τότε οι γωνίες (Α Χ Τ) (Β Ζ Υ) ονομάζονται εξωτερικές γωνίες του ασυμπτωτικού τριγώνου. Η τομή του εσωτερικού των γωνιών (Α Β Χ) (Β Α Υ) ονομάζεται εσωτερικό του ασυμπτωτικού τριγώνου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 8. Αν η γωνία (Α Χ Β) ισούται με την (Β Α Υ), τότε το ασυμπτωτικό τρίγωνο λέγεται ισοσκελές



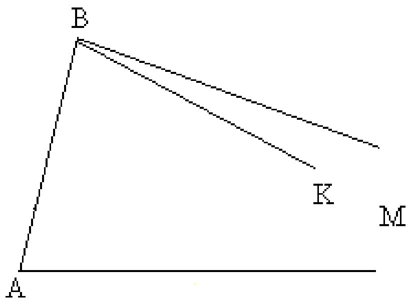
ΠΡΟΤΑΣΗ 13. Η ευθεία που περνά από εσωτερικό σημείο του ασυμπτωτικού τριγώνου και είναι παράλληλη στις παράλληλες πλευρές του, τέμνει την πεπερασμένη πλευρά του τριγώνου.



ΠΡΟΤΑΣΗ 14. Το άθροισμα των γωνιών ενός ασυμπτωτικού τριγώνου είναι μικρότερο των 180 μοιρών.

ΠΡΟΤΑΣΗ 15. Η εξωτερική γωνία ενός ασυμπτωτικού τριγώνου είναι μεγαλύτερη από την απέναντι εσωτερική του γωνία.

ΟΡΙΣΜΟΣ 9. Δύο ασυμπτωτικά τρίγωνα λέγονται ίσα αν έχουν τις πεπερασμένες πλευρές και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.



ΠΡΟΤΑΣΗ 16. (1ο Κριτήριο Ισότητας Ασυμπτωτικών Τριγώνων). Δύο ασυμπτωτικά τρίγωνα είναι ίσα, αν μια γωνία και η πεπερασμένη πλευρά του ενός είναι αντίστοιχα ίσες με μια γωνία και την πεπερασμένη πλευρά του άλλου.

ΠΡΟΤΑΣΗ 17. (2ο Κριτήριο Ισότητας Ασυμπτωτικών Τριγώνων). Δύο ασυμπτωτικά τρίγωνα είναι ίσα, αν οι γωνίες του ενός είναι αντίστοιχα ίσες με τις γωνίες του άλλου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 10 . Ένα τρίγωνο, που δύο κορυφές του είναι επ’ άπειρο σημεία λέγεται διπλά ασυμπτωτικό. Ένα τρίγωνο που και οι τρεις κορυφές του είναι επ’ άπειρο σημεία λέγεται τριπλά ασυμπτωτικό.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο. ΠΗΓΕΣ

1. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:

- Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Γενικού Λυκείου , Η. Αργυρόπουλος, Π. Βλάμος, Γ. Καστούλης, Π Σίδερης. Εκδόσεις ΟΕΔΒ
- Ευκλείδη ''Στοιχεία'' Θ. Εξαρχάκος, Β. Ντζιαχρήστος, Δ. Κοντογιάννης, Α. Φελούρης, Χ. Στατεράς, Σ. Μέτης, Ι. Χριστοδούλου, Γ. Δημάκος, Π. Βλάμος, Γ. Μπαραλής, Α. Δούναβης, Δ. Λάππας, Κ. Καμπούκος, Δ. Λιουδάκης, Γ. Τασσόπουλος. Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης 2001.
- Ο Σύμβουλος Των Νέων, Νέα Παιδική Και Σχολική Εγκυκλοπαίδεια, Συγχρονισμένη Έκδοσή:1975

2. ΔΙΚΤΥΟΓΡΑΦΙΑ:

- http://users.sch.gr/ppinats/math_morfes.html
- http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9C%CF%80%CE%AD%CF%81%CE%BD%CE%B1%CF%81%CE%BD%CF%84_%CE%A1%CE%AF%CE%BC%CE%B1%CE%BD
- http://invenio.lib.auth.gr/record/129326/files/GRI-2012-8762.pdf
- http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%A5%CF%80%CE%B5%CF%81%CE%B2%CE%BF%CE%BB%CE%B9%CE%BA%CE%AE_%CE%B3%CE%B5%CF%89%CE%BC%CE%B5%CF%84%CF%81%CE%AF%CE%B1
- http://feltor.wordpress.com/2011/01/04/%CF%84%CE%BF-%CF%80%CE%AD%CE%BC%CF%80%CF%84%CE%BF-%CE%B1%CE%AF%CF%84%CE%B7%CE%BC%CE%B1-%CF%84%CE%BF%CF%85-%CE%B5%CF%85%CE%BA%CE%BB%CE%B5%CE%AF%CE%B4%CE%B7/
- http://www.astrologicon.org/forum/viewtopic.php?f=21&t=720
- http://civil.teipir.gr/web/uploads/B_PAPANTONIOU_pps.pdf
- http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_kotsobou.pdf
- http://el.wikipedia.org/wiki/Κατηγορία:Γεωμετρία
- http://www.arcmeletitiki.gr/images/uploads/pdf.arc_gen9.pdf

- http://users.sch.gr/ppinats/math.morfes.html
- http://www.miclub.gr/index.php/2010-04-02-16-44-29/3-2010-04-02-16-30-10/238-2012-05-27-11-14-43
- http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%95%CF%85%CE%BA%CE%BB%CE%B5%CE%AF%CE%B4%CE%B7%CF%82
- http://biographies.nea-acropoli.gr/index.php?option=com_content&view=article&catid=6:mathimatika&id=21:-325-265&Itemid=17
- http://www.mathimatikos.com/mathimatika_euklidis.php
- http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%95%CF%85%CE%BA%CE%BB%CE%B5%CE%AF%CE%B4%CE%B5%CE%B9%CE%B1_%CE%B3%CE%B5%CF%89%CE%BC%CE%B5%CF%84%CF%81%CE%AF%CE%B1
- http://users.uoa.gr/~evassil/dida.pdf
- http://www.hellenica.de/Math/EvkleidiaGeometria.html
- http://users.sch.gr/ppinats/math_morfes.html
- http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9C%CF%80%CE%AD%CF%81%CE%BD%CE%B1%CF%81%CE%BD%CF%84_%CE%A1%CE%AF%CE%BC%CE%B1%CE%BD
- http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_kotsobou.pdf
- http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9C%CF%80%CE%AD%CF%81%CE%BD%CE%B1%CF%81%CE%BD%CF%84_%CE%A1%CE%AF%CE%BC%CE%B1%CE%BD
- http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%A4%CE%B1%CE%BD%CF%85%CF%83%CF%84%CE%AE%CF%82_%CE%BA%CE%B1%CE%BC%CF%80%CF%85%CE%BB%CF%8C%CF%84%CE%B7%CF%84%CE%B1%CF%82_Riemann
- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:De_Bernhard_Riemann_Mathematische_Werke_172.png
- http://invenio.lib.auth.gr/record/129326/files/GRI-2012-8762.pdf
- http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%A5%CF%80%CE%B5%CF%81%CE%B2%CE%BF%CE%BB%CE%B9%CE%BA%CE%AE_%CE%B3%CE%B5%CF%89%CE%BC%CE%B5%CF%84%CF%81%CE%AF%CE%B1

- http://www.livepedia.gr/index.php?title=%CE%9B%CE%BF%CE%BC%CF%80%CE%B1%CF%84%CF%83%CE%AD%CF%86%CF%83%CE%BA%CE%B9_%CE%9D%CE%B9%CE%BA%CE%BF%CE%BB%CE%AC%CE%B9_%CE%99%CE%B2%CE%AC%CE%BD%CE%BF%CE%B2%CE%B9%CF%84%CF%82
- http://www.ethnos.gr/entheta.asp?catid=23573&subid=2&pubid=3628865
- http://www.ygeiaonline.gr/index.php?option=com_k2&view=item&id=32127:lompatsefski_nikolai_ibanobits